

ЛЕКЦИЯ 2

Бірінші ретті сызықты теңдеулер

3.1. Белгісіз функция мен оның туындысы сызықты түрде, яғни бірінші дәрежеде байланысқан теңдеуді сызықты дифференциалдық теңдеу деп атайды. Сызықты теңдеудің келтірілген түрін қарастырайық:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

Мұнда $p(x)$, $q(x)$ функциялары кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған және үздіксіз деп есептелінеді. Егер $q(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеуді біртекті сызықты теңдеу деп, ал $q(x) = 0$ болса, онда біртекті сызықты теңдеу деп атайды:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

Көбінесе (2) теңдеуді (1) теңдеудің сәйкес біртектісі деп атайды.

Біртекті (2) теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Екі жағын y -ке бөліп, мынандай теңдеу аламыз:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазсақ,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (3)$$

түріндегі (2) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Егер $y=0$ жағдайды қарастырсақ, ол осы жалпы шешімнің $C=0$ болғандағы мәніне сәйкес келетін шешім. Сондықтан $y=0$ – дербес шешім. Оны нөлдік немесе тривиал шешім деп те атайды және ол барлық уақытта бар шешім.

Біртекті (2) теңдеудің (3) жалпы шешімін Коши түрінде жазсақ, былай жазылады:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \quad (4)$$

мұнда x_0 – тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

Біртекті теңдеу шешімдерінің екі қасиетін атап өтейік:

1⁰. Егер y_1 және y_2 функциялары (2) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың қосындысы: $y=y_1+y_2$ функциясы да сол теңдеудің шешімі болады.

2⁰. Егер y_1 функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y=Cy_1$ функциясы да (C – кез келген сан) сол теңдеудің шешімі болады.

3.2. Енді берілген біртектісіз (1) теңдеуге оралатын болсақ, оның жалпы шешімін табу үшін мынандай әдістерді қолдануға болады.

1⁰. Тұрақты санды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі).

Біртектісіз (1) теңдеудің жалпы шешімін біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімі – (3) түрде іздейміз, бірақ мұндағы C санын x -қа байланысты айнымалы функция деп есептейміз:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (5)$$

Осы функцияны (1) теңдеуге апарып қоялық:

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Бұдан

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

теңдеуін аламыз. Енді осы теңдеуді интегралдасақ, онда

$$C(x) = C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \quad (6)$$

өрнегін аламыз. Мұнда C_0 – кез келген тұрақты сан. Осы (6) өрнекті (5) қатынасқа апарып қойсақ, онда біртекті (1) теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (7)$$

Соңғы шешімді Коши түрінде жазсақ, онда мынандай өрнек аламыз:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(x)e^{\int_{x_0}^x p(x)dx} dx \right] \quad (8)$$

мұнда x_0 – тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептейміз.

2⁰. Бернуллі әдісі.

Біртекті (1) теңдеудің шешімін $y = u(x)v(x)$ түрінде іздейміз. Сонда

$$\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \quad (9)$$

Мұндағы, $u(x)$ функциясын біртекті $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ теңдеудің шешімі $u = e^{-\int p(x)dx}$ түрінде алсақ, онда (9) қатынастан

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{dv}{dx} = q(x)$$

теңдеуін аламыз. Осыдан интегралдау арқылы

$$v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \quad (10)$$

болатынын көреміз. Мұнда C – тұрақты сан. Табылған $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының көбейтіндісі $y(x)$ функциясын беретін болғандықтан,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right],$$

яғни жалпы шешім (7) түрге келеміз.

3⁰. Интегралдаушы көбейткіш әдісі (Эйлер әдісі).

Берілген біртекті (1) теңдеудің екі жағын $e^{\int p(x)dx}$ функциясына көбейтіп, ықшамдап жазатын болсақ, онда мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Осы қатынасты интегрлдасақ:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C,$$

ал бұдан

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

Тағы да жалпы шешім – (7) түрге келдік.

Жалпы, белгілі бір теңдеудің шешімін іздегенде жоғарыда келтірілген әдістердің есептеу жолын қайталамай-ақ, дайын (7) өрнекті пайдалану керек.

3.3. Енді сызықты теңдеуге келтірілетін теңдеулерді қарастырайық.

Мына түрдегі теңдеуді

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (11)$$

Бернулли теңдеуі деп атайды. Егер $n=0$, не $n=1$ болса, онда бұл теңдеу сызықты теңдеуге айналады. Сондықтан, $n \neq 0, 1$ - жағдайды қарастырамыз. Бұл жағдайда

$$z = y^{1-n}$$

алмастыруын енгізсек, мынандай теңдеу аламыз:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x) \quad (12)$$

Бұл сызықтық біртекті теңдеу. Оның жалпы шешіміндегі z -тың орнына y^{1-n} -ты қойсақ, Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі алынады:

$$y = \left[e^{(n-1)\int p(x)dx} (C + (1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx} dx) \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (13)$$

Бернулли теңдеуіне кей жағдайларда келтірілетін теңдеудің біреуі Рикатти теңдеуі:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + z(x) \quad (14)$$

Бұл теңдеу жалпы жағдайда тұйық түрде интегралданбайды, бірақ оның бір дербес шешімі белгілі болса, онда ол Бернулли теңдеуіне келтіріледі. Айталық, $y = \varphi(x)$ (14) теңдеудің белгілі бір аралықтағы шешімі болсын. Рикатти теңдеуіне $z = y - \varphi(x)$ алмастыруын енгізсек, онда

$$z' - [2p(x)\varphi(x) + q(x)]z = p(x)z^2 \quad (15)$$

түріндегі Бернулли теңдеуін аламыз. Ал бұл теңдеуді өз кезегінде сызықты теңдеуге келетінін жоғарыда көрсеткенбіз.